

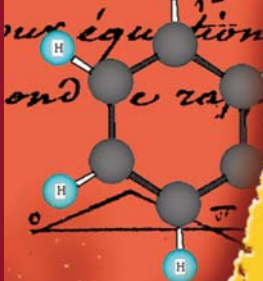
1 7 6 8 - 1 8 3 0

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$= \underline{29 \text{ in.} \cdot \text{ft}} - \underline{2}$$

$$\frac{1}{4} \pi - \frac{2}{\pi}$$

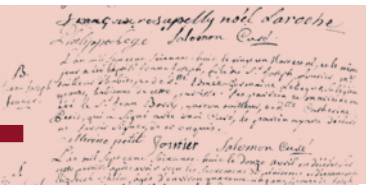
er est représenté



scati

Hier et Aujourd'hui

4



Jean-Baptiste Fourier

la vocation scientifique

- > 1789 – 5 mai : Ouverture des Etats Généraux
- > 1793 Janvier : Louis XVI est condamné à mort et guillotiné
- > 1792 Septembre – 1795 octobre : Convention Nationale
- > 1794 – 27 juillet : Chute de Robespierre



Joseph Fourier

Egyptologue, administrateur

- > 1799 – 9 novembre : Coup d'Etat du 18 Brumaire, an VIII

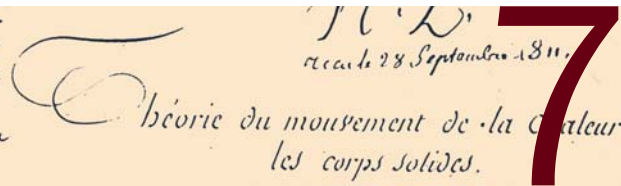
6



Grenoble

Préfet et chercheur

- > 1804 – 18 mai : Proclamation de l'Empire
- > 1804 – 6 avril : Première Restauration – Louis XVIII
- > 1810 – Création des trois facultés de Grenoble : droit, lettres, sciences
- > 1815 – 1^{er} mars : Napoléon – retour de l'île d'Elbe – Les Cent jours



L'œuvre scientifique

Un physicien – mathématicien

Joseph Fourier a un esprit très déductif, systématique et méthodique, il veut ramener son problème de physique à un problème d'analyse mathématique.



L'œuvre scientifique

Analyse, série et transformée de Fourier

Joseph Fourier découvre qu'une fonction complexe, par exemple un signal sonore, peut être décomposée en une somme de fonctions plus simples. Cette somme est appelée série de Fourier ou décomposition de Fourier. L'information contenue dans le signal est codée par sa transformée de Fourier.



9

L'Académie des Sciences

La consécration scientifique

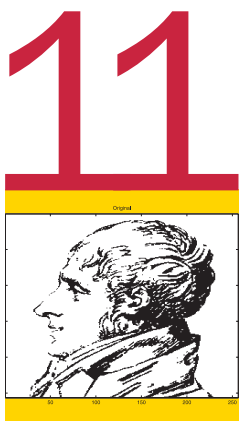
- > 1815 – 8 juillet : Seconde Restauration
- > 20 mars – 22 juin 1815 : Les « Cent Jours »
- > 1824 – 16 septembre : Avènement de Charles X



Aujourd'hui

L'unité des mathématiques

En recherche mathématique, Joseph Fourier a inventé deux théories qui ont pris un essor considérable après lui, avec le développement des puissances de calcul informatique : la programmation linéaire et l'analyse dite "de Fourier".



Les ondelettes : un zoom de la transformée de Fourier

Dérivée de l'analyse de Fourier, la théorie mathématique des ondelettes découverte dans les années 1980 ouvre sur de multiples applications dans le domaine de la compression d'image, de l'imagerie médicale, de la prospection géophysique, du cryptage et du décryptage des données.



Voir le cerveau en action

Imagerie par résonance magnétique (IRM)

Voir les structures cérébrales anatomiques, détecter des pathologies particulières, diagnostiquer des maladies, ou réaliser des images sensibles à l'activité cérébrale... Ces nouvelles images médicales sont obtenues en grande partie grâce aux techniques d'analyse introduites par Joseph Fourier.



La spectroscopie moléculaire

Etudier les atmosphères planétaires, les molécules intersidérales, détecter des pollutions dans l'atmosphère terrestre, étudier des combustions (moteurs de voiture, fusée...), contrôler la qualité des produits pharmaceutiques, sont autant d'applications rendues possibles par une technique de spectrométrie appelée : "spectroscopie par transformée de Fourier".



Du cristal à la structure des protéines Biologie structurale

Pour développer de nouveaux médicaments, comprendre l'activité d'un composé pharmaceutique ou déterminer la fonction biologique d'une protéine, connaître sa structure atomique est primordial. Pour y parvenir, les cristallographes utilisent la diffraction des rayons X, et ont besoin des relations mathématiques développées par Joseph Fourier.



La Résonance Magnétique Nucléaire des macromolécules biologiques

Pour déterminer la structure des macromolécules biologiques, la résonance magnétique nucléaire (RMN) est une technique très utilisée aujourd'hui. Elle s'appuie elle aussi sur la transformée de Fourier.

JOSEPH FOURIER : Hier, Aujourd'hui et Demain...

Riche existence que celle de Joseph Fourier qui a été successivement, élève de la première promotion de l'Ecole normale, professeur à l'Ecole polytechnique, membre de l'expédition d'Egypte, membre de l'Académie des Sciences et de l'Académie Française. C'est à Grenoble, où il a été tout à la fois préfet, historien, et homme de science, qu'il écrit ce qui deviendra son œuvre essentielle "la Théorie Analytique de la chaleur", dans laquelle il établit les équations du problème physique de la propagation de la chaleur dans les solides et forge l'outil mathématique nécessaire à leur résolution. L'analyse de Fourier et la transformée de Fourier sont aujourd'hui d'un usage constant dans de nombreux domaines de la physique, de la chimie, et de la médecine. Depuis 1987, l'université des sciences, des technologies et de la santé de Grenoble porte le nom de Joseph Fourier, illustre savant connu dans le monde entier dont les découvertes scientifiques d'hier ont encore aujourd'hui toute leur actualité. Pour illustrer cette vitalité de l'œuvre scientifique de ce grand physicien-mathématicien, enquête a été menée dans quelques grands laboratoires universitaires grenoblois pour comprendre comment les chercheurs continuent aujourd'hui à utiliser les théories de Fourier en recherche mathématiques, traitement du signal, imagerie médicale, analyses chimiques de gaz, biologie structurale, Résonance Magnétique nucléaire... Preuve que les découvertes de Joseph Fourier ont encore des secrets à livrer aujourd'hui pour le monde de demain ! ●

Farid Ouabdesselam

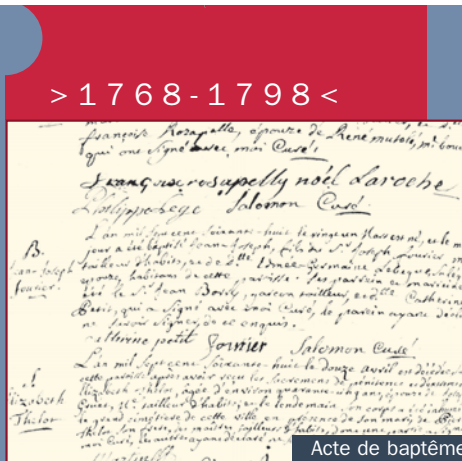
Président de l'université Joseph Fourier

“Dans quelque condition que la fortune l’eût placé, ou pâtre ou prince, il aurait été grand géomètre.”

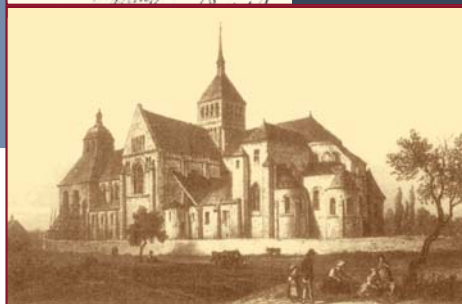
Joseph Fourier parlant de Lagrange en prononçant l'éloge de Laplace...



Auxerre



Acte de baptême



Maison natale

Abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire



Jean-Baptiste Joseph Fourier, la vocation scientifique

Né le 21 mars 1768, à Auxerre, d'une famille modeste de seize enfants, rien ne prédestinait le jeune Joseph Fourier à devenir tout à la fois, un scientifique à la valeur universellement reconnue et un grand serviteur de l'Etat. Orphelin à l'âge de 9 ans il est remarqué pour ses capacités intellectuelles et rentre à l'Ecole royale militaire d'Auxerre. A sa sortie, n'étant pas noble il ne peut faire carrière dans l'armée, il entre alors comme novice à l'Abbaye de Saint-Benoît sur Loire.

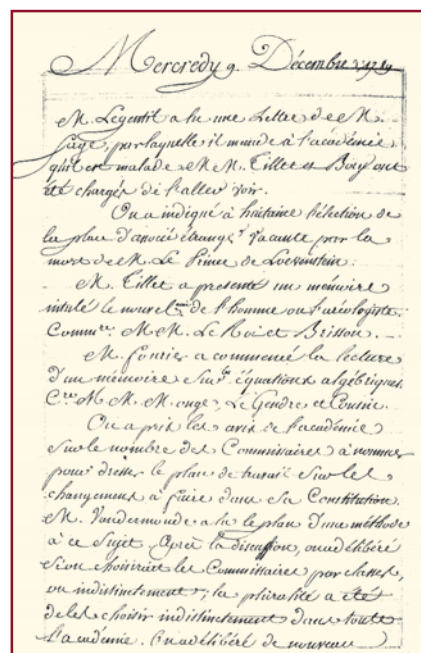
Isolé, "seul et sans secours", sans personne avec qui parler sciences, privé d'ouvrages scientifiques, il met cependant à profit le calme de la vie monacale pour se livrer à de premiers travaux de recherches sur quelques théorèmes généraux relatifs à la résolution d'équations algébriques.

Il peut présenter ce travail à l'Académie en décembre 1789. Après avoir quitté l'Abbaye, il enseigne à Auxerre. Au départ étranger au mouvement révolutionnaire, il s'engage ensuite

résolument aux côtés des forces révolutionnaires en 1792 dont il devient l'un des responsables dans sa ville. Lorsque la Convention crée l'Ecole normale qui deviendra l'Ecole Normale Supérieure, il est choisi pour faire partie de la première promotion. ●

Repères biographiques

- > 1768 - 1789 : Enfance à Auxerre-Etudes au Collège royal militaire d'Auxerre
- Novice à l'Abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire
- Première communication sur les équations algébriques à l'Académie des Sciences
- > 1789 - 1794 : Professeur à l'Ecole royale militaire d'Auxerre
- > 1795 : Elève à l'Ecole normale - Paris
- > 1795-98 : Professeur à l'Ecole polytechnique - Paris



Fourier communique à l'Académie

> 1795 – 1798 Joseph Fourier, élève et enseignant <

Hiver 1795 : Joseph Fourier est l'un des 1 500 élèves de la première promotion de l'Ecole normale. Il y reçoit les leçons de quelques-uns des plus grands scientifiques de l'époque : Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, René-Just Haüy, Gaspard Monge, Claude-Louis Berthollet, Louis-Jean-Marie Daubenton. En 1797, il succède à Lagrange comme chargé du cours d'analyse à l'Ecole polytechnique et publie dans le Journal de l'Ecole Polytechnique un mémoire sur la statique et une démonstration du principe des vitesses virtuelles.



Joseph-Louis Lagrange



Pierre-Simon Laplace



René-Just Haüy



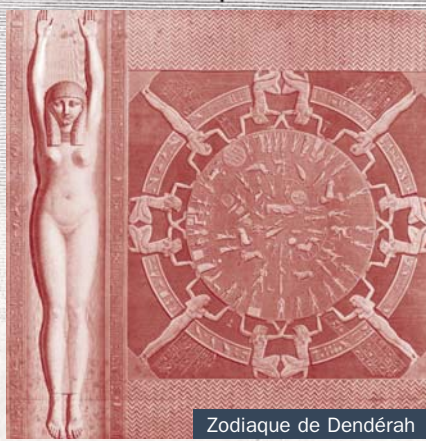
Gaspard Monge



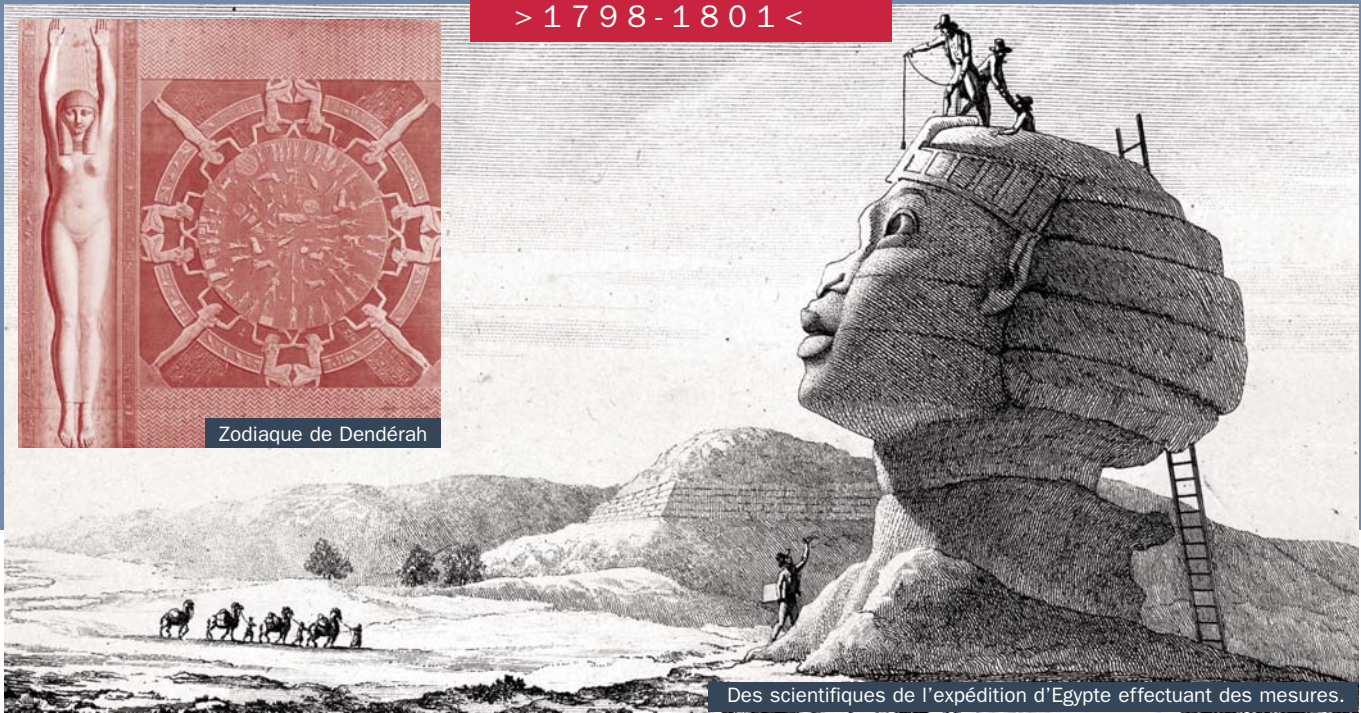
Claude-Louis Berthollet

Repères historiques

- > 1789 – 5 mai : Ouverture des Etats Généraux
- > 1793 Janvier : Louis XVI est condamné à mort et guillotiné
- > 1792 Septembre – 1795 octobre : Convention Nationale
- > 1794 – 27 juillet : Chute de Robespierre



Zodiaque de Dendérah



Des scientifiques de l'expédition d'Egypte effectuant des mesures.

Joseph Fourier Égyptologue, administrateur

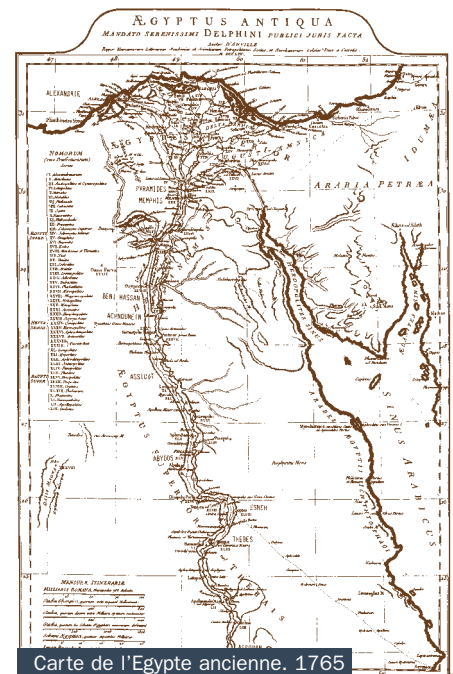
En mai 1798, Fourier est proposé à la demande de Monge et de Berthollet pour faire partie de l'expédition d'Égypte. Nommé Secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte dès août 1798, Fourier développe une activité considérable dans le domaine administratif et archéologique.

Il peut même faire un peu de science, continuant ses réflexions sur les équations algébriques et abordant quelques problèmes de physique appliquée. Il dirige l'une des deux commissions scientifiques chargées d'explorer la Haute-Égypte. En 1799, l'Institut d'Égypte lui confie la direction de l'ouvrage commandé par Bonaparte qui recueillera toutes les observations faites durant l'expédition. Finalement, sa tâche essentielle consistera, de retour en France, à rédiger la "Préface Historique" qui accompagnera le grand ouvrage. Fourier assure également des missions politiques et administratives dans lesquelles il se révèle excellent négociateur.

A la fin de 1801, il quitte l'Égypte et regagne la France, "avec les derniers débris de l'armée". A Paris, il espère pouvoir se consacrer à ses travaux d'égyptologue et de mathématicien et souhaite retrouver son poste à l'Ecole polytechnique mais, début 1802 Napoléon le nomme Préfet de l'Isère. ●



Description de l'Egypte



Carte de l'Egypte ancienne. 1765

PRÉFACE HISTORIQUE.

PAR M. FOURIER.

L'Égypte, placée entre l'Afrique et l'Asie, et communiquant facilement avec l'Europe, occupe le centre de l'ancien continent. C'est comme un point de vue de grande importance, elle est la partie du monde où se conservent des monuments inestimables, ses principes simples, et les palais que ses rois ont bâtis, subsistent encore, quoique les mains actives de ces siècles aient été consumées dans la guerre de Troie, Homère, Lycurgue, Solon, Pythagore et Platon, se rendirent en Égypte pour y étudier les sciences, la religion et les lois. Alexandre y fonda une ville splendide, qui resta longtemps le temple du commerce, et qui en Pompée, César, Marc Antoine et Auguste, devint entre eux la scène de Rome et du salut du monde entier. Le projet de ce pays est d'appeler l'attention des princes illustres qui règlent les destinées des nations.

Il ne s'en forme, dans l'Occident ou dans l'Asie, aucune puissance considérable qui n'ait porté ses vues sur l'Égypte, et ne l'ait regardée, en quelque sorte, comme son ouvrage naturel. Tous les

> Extraits de la liste des travaux scientifiques et administratifs conduits par Fourier lors de l'expédition d'Égypte :

(notes biographiques de Victor Cousin – Académie Française)

- > séance du 21 Fructidor an VI : Fourier lit un mémoire sur la résolution générale des équations algébriques
- > séance du 16 Pluviôse : Mémoire de mathématiques intitulé : recherche sur la méthode d'élimination
- > séance du 11 Messidor : Mémoire de mathématiques qui contient la Démonstration d'un nouveau théorème d'algèbre - Division et répartition du travail de la commission des renseignements sur l'état moderne d'Égypte...
- > séance du 6 Nivôse an IX : Fourier présente à l'Institut un mémoire de mathématiques sur l'analyse indéterminée
- > 6 Nivôse : Rapport à l'Institut sur les recherches à faire dans l'emplacement de l'ancienne Memphis et dans toute l'étendue des sépultures...
- > 15 Fructidor an VIII : Formation d'une commission chargée de rédiger un plan général d'administration de la justice en Égypte...
- > 15 Frimaire : Institution d'un journal arabe destiné à répandre dans toute l'Égypte les actes du gouvernement français...

Repères historiques

> 1799 – 9 novembre : Coup d'État du 18 Brumaire, an VIII

Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différentes parties d'un grand corps, elle tend à se mettre en équilibre en se dissipant uniformément par les parties qui sont plus chauffées, et au contraire, qui se refroidissent, en même temps la chaleur se dissipe et s'étend par les parties qui se refroidissent le moins, ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme, est une loi très générale et spontanée qui a lieu à la surface des corps, sous les émanations qui changent à chaque instant la température de différentes parties. La question de la propagation de la chaleur, conduit à déterminer quelle est la transmission de chaque point d'un corps à un instant donné. On suppose que les températures initiales soient connues, et

Manuscrit remis à l'Académie en 1807



Fourier en habit de préfet par Gautherot

Grenoble, fin du XVIII^e siècle

Fourier réalisant
l'expérience de l'armille à
la préfecture de l'Isère.
(dessin F. Lacaf)

Grenoble, fin du XVIII^e siècle

A cartoon illustration of a man in a red jacket and a man in a green jacket in a room with a grandfather clock and a large window. The man in the red jacket is pointing towards the man in the green jacket, who is holding a small object. The room has a large window with a view of a city, a grandfather clock, and a small table with a lamp.

Fourier après avoir établi et résolu l'équation de la chaleur dans les solides, cherche à en vérifier la validité par de nombreuses expériences faites à Grenoble. L'une d'elles est celle de l'armille. Sur le pourtour d'un anneau métallique, une armille, sont aménagés de petits trous que l'on remplit de mercure, où l'on peut disposer des

thermomètres. L'armille est placée horizontalement sur trois montants de bois. Une lampe permet de chauffer l'armille en un point (c) maintenu à une température donnée. Le but de l'expérience est de vérifier si les températures obtenues à l'équilibre sont en accord avec le calcul. La thermostatisation de la pièce est assurée par l'ouverture et la fermeture de deux portes attenantes à la pièce d'expérience.



De 1802 à 1809, Fourier consacre une partie de son temps à la rédaction de la *Préface Historique de l’Egypte*, une tâche importante pour laquelle Napoléon le presse. A cette époque il se fait présenter, lors de l’une des nombreuses visites scolaires, Jean-François Champollion (*à gauche*), frère cadet de Jacques-Joseph – premier doyen de la Faculté des Lettres de Grenoble, (*à droite*) – qui en 1822 déchiffra les hiéroglyphes égyptiens. Joseph Fourier aidera Jean-François dans sa passion pour les langues orientales et le protégera de la conscription.

Feuilles d'expériences de Fourier

Dans ses travaux théoriques il est soucieux des applications. Il est aussi ingénieur dans les grands travaux qui se font à l'époque dans le département de l'Isère, l'assèchement des marais de Bourgoin et surtout la construction de la route de Grenoble à Turin par le col du Lautaret. Il porte aussi intérêt à des problèmes d'économie locale. Les événements de 1814-1815 viennent interrompre ses travaux scientifiques... ●

- 1804 – 18 mai : Proclamation de l'Empire
- 1804 – 6 avril : Première Restauration – Louis XVIII
- 1810 – Création des trois facultés de Grenoble : droit, lettres, sciences
- 1815 – 1^{er} mars : Napoléon – retour de l'île d'Elbe – Les Cent jours

“L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.”

Joseph Fourier, un physicien- mathématicien

Joseph Fourier a un esprit très déductif, systématique et méthodique, il veut ramener son problème de physique à un problème d'analyse mathématique. Les mathématiques sont pour lui un outil merveilleux pour traduire les phénomènes physiques.

Les équations algébriques

Son premier intérêt scientifique, Fourier le réserve aux mathématiques, en abordant alors qu'il n'a que seize ans, l'étude de quelques théorèmes relatifs aux équations algébriques à coefficients entiers (problème de Descartes). Il travaillera sur ce sujet toute son existence et l'ensemble de ses travaux sur ce thème sera rassemblé dans un ouvrage posthume : « Analyse des Equations Déterminées ». Mais le travail qui le mènera à ses plus grandes découvertes, le développement d'une fonction suivant les sinus et cosinus d'arcs multiples et la transformation fonctionnelle qui porte son nom, la **transformée de Fourier** (TF), ont été le fruit d'une réflexion approfondie sur un problème de physique : la recherche des lois de la propagation de la chaleur.

La propagation de la chaleur dans les solides

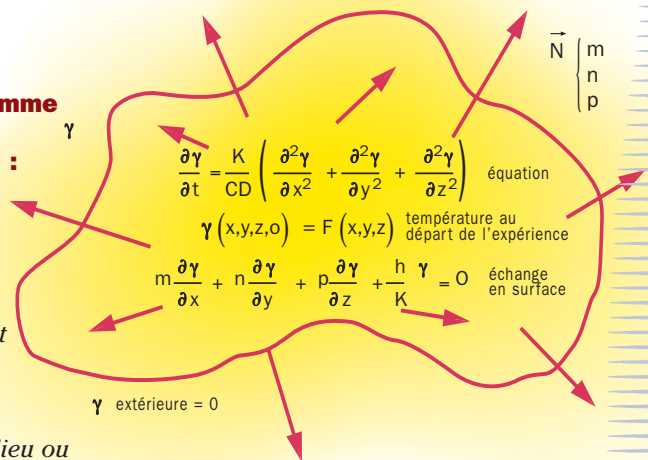
“La théorie de la chaleur de Fourier est un des premiers exemples de l'application de l'analyse à la physique, en partant d'hypothèses simples qui ne sont autre chose que des faits expérimentaux généralisés, Fourier en a déduit une série de conséquences dont l'ensemble constitue une théorie simple et cohérente.”

Henri Poincaré (1893)

Il formule le problème comme suit dans la “Théorie Analytique de la Chaleur” :

“Lorsque la chaleur est inégalement distribuée entre les différents points d'une masse solide, elle tend à se mettre en équilibre et passe lentement des parties qui sont le plus chauffées dans celles qui le sont moins ; en même temps elle se dissipe par la surface et se perd dans le milieu ou dans le vide. Cette tendance à une distribution uniforme et cette émission spontanée qui s'opère à la surface des corps change continuellement la température des différents points. La question de la propagation de la chaleur consiste à déterminer quelle est la température de chaque point d'un corps à un instant donné, en supposant que les températures initiales sont données.” (Fourier). Le problème simple dans la formulation est cependant complexe car il implique la manipulation de concepts alors mal maîtrisés : température, chaleur spécifique, conductibilité thermique et surtout celui de chaleur. S'agit-il d'une substance (le calorique) ou du mouvement des particules constitutives de la matière ? Joseph Fourier dit qu'il ne faut pas choisir. Il définit la chaleur par les équations auxquelles elle satisfait. Au problème de la propagation de la chaleur il adjoint aussi une importante étude sur la chaleur rayonnante.

Il définit la chaleur par les équations auxquelles elle satisfait. Au problème de la propagation de la chaleur il adjoint aussi une importante étude sur la chaleur rayonnante.

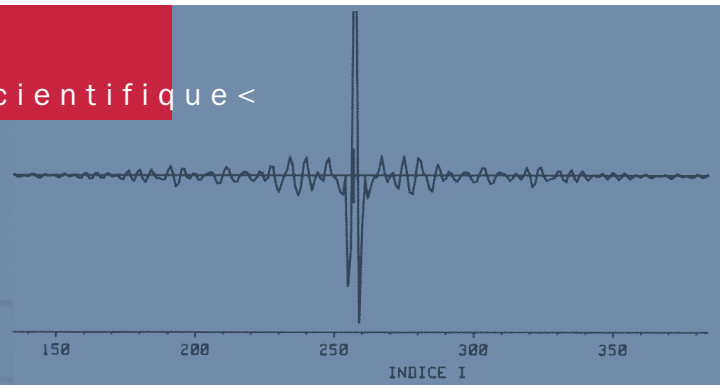


> Equation de la chaleur dans le cas général

C : chaleur spécifique - D : densité
K : conductibilité thermique interne
h : conductibilité thermique externe
 γ : température
t : temps

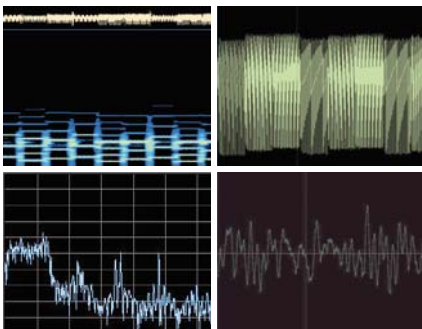
Joseph Fourier Hier et Aujourd'hui

Analyse, série et transformée de Fourier

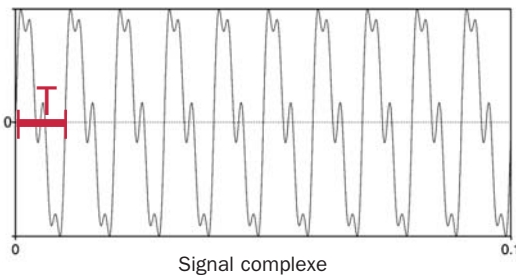


Délimitation de la période T (le motif)
Une fonction périodique est une fonction qui répète par translation un même motif appelé période. Une fonction périodique est aussi appelée un signal. La fréquence c'est l'inverse de la période soit $f=1/T$

Joseph Fourier découvre qu'une fonction complexe, par exemple un signal sonore, peut être décomposée en une somme de fonctions plus simples. Cette somme est appelée série de Fourier ou décomposition de Fourier. L'information contenue dans le signal est codée par sa **transformée de Fourier**.

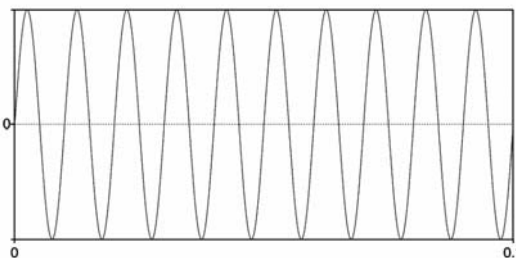


Transformée de Fourier



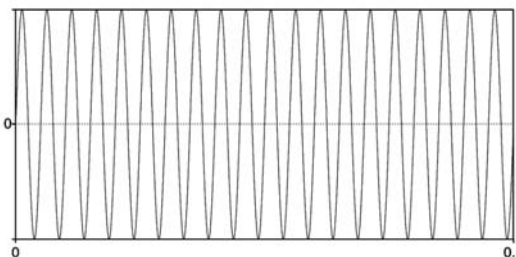
=

$\frac{1}{2} \times$



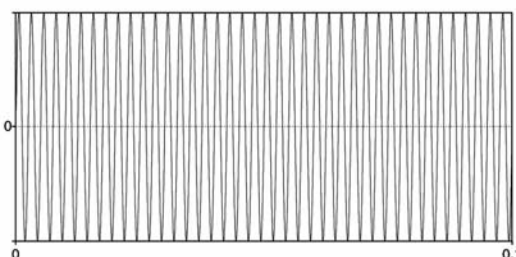
+

$\frac{1}{5} \times$



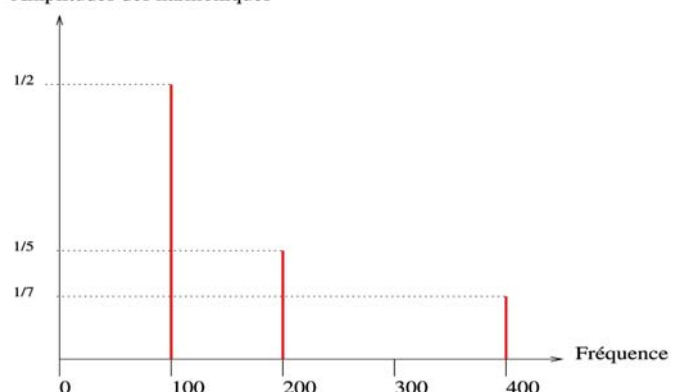
+

$\frac{1}{7} \times$



La décomposition précédente est codée par le schéma ci-dessous. C'est la **Transformée de Fourier** du signal complexe de départ.

Amplitudes des harmoniques



> Représentation de la transformée de Fourier du signal complexe <

Fourier écrit, concernant une fonction définie dans un intervalle $[0, x]$. "Il résulte de tout ce qui a été démontré dans cette section, concernant le développement des fonctions en séries trigonométriques que si l'on suppose une fonction $f(x)$, dont la valeur est représentée dans un intervalle déterminé depuis $x=0$ jusqu'à $x=x$, par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement, on pourra toujours développer une fonction en une série qui ne contiendra que les sinus ou les cosinus, ou les sinus et les cosinus d'arcs multiples..."

Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur* – article 235.

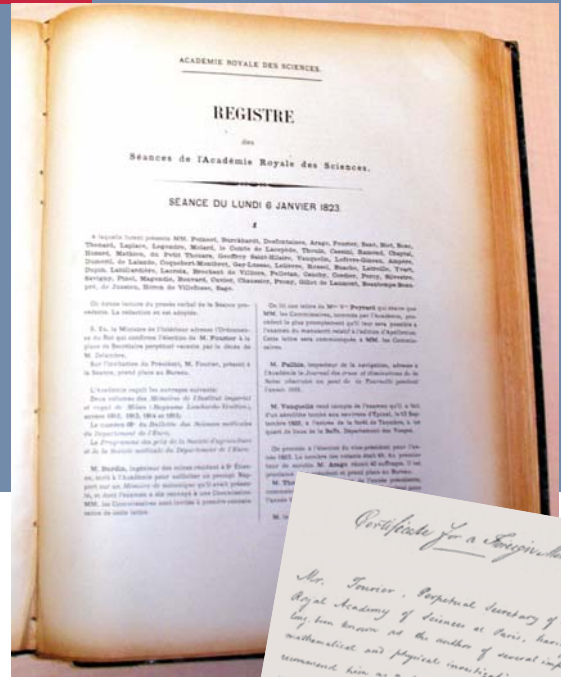
Un tel énoncé général nécessite un cadre mathématique adapté.

“Les mathématiciens doivent aussi être des lettrés...”



La Bibliothèque de l'Académie, début du XIX^e siècle

Registre de l'Académie des Sciences annonçant l'élection de Joseph Fourier



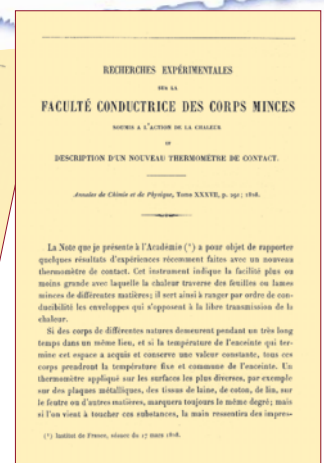
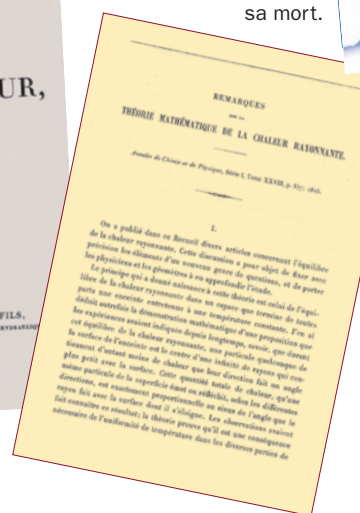
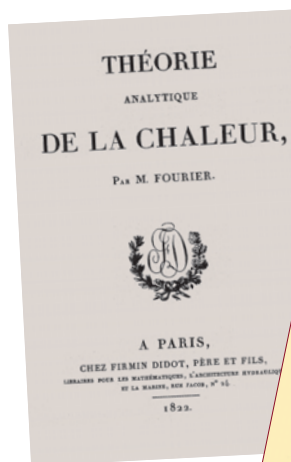
Certificat d'admission à la Royal Society de Londres

L'Académie des sciences La consécration scientifique de Joseph Fourier

Après la chute de l'Empire, Fourier demeure Préfet de l'Isère sous la Première Restauration. Au retour de l'île d'Elbe, Napoléon le suspend de ses fonctions et le nomme Préfet du Rhône. Avant la fin des « Cent jours » il remet sa démission. Louis XVIII revient, Fourier gagne Paris. Pour lui permettre de subsister, un ancien élève lui confie un poste au Bureau des statistiques de la Préfecture de la Seine. Au terme d'une élection une première fois annulée par le roi, il entre le 12 mai 1817 à l'Académie des Sciences. Libéré de tout souci matériel, Fourier continue ses travaux sur le problème de la chaleur et publie de nombreux mémoires. Il se consacre à l'étude de très nombreux rapports pour l'Académie et au conseil de jeune mathématiciens. En 1822, il fait paraître son ouvrage, résultat de ses travaux grenoblois : « *Théorie analytique de la chaleur* ». La même année, il est élu secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. En 1823, il est élu membre associé libre à l'Académie de Médecine et en 1826 il entre à l'Académie Française. Il devient aussi membre de la Royal Society de Londres.

Malgré son état de santé difficile, Fourier continue sa vie scientifique. A la séance du 10 mai 1830, l'Académie lui confie avec Arago et Cauchy l'analyse d'un mémoire de Clapeyron sur « la solidification par refroidissement d'un globe liquide ». Le 17 mai 1830, annonce est faite de sa mort à l'Académie des Sciences, là où il a tant travaillé. ●

Extrait du compte-rendu de la séance du 17 mai 1830 annonçant sa mort.



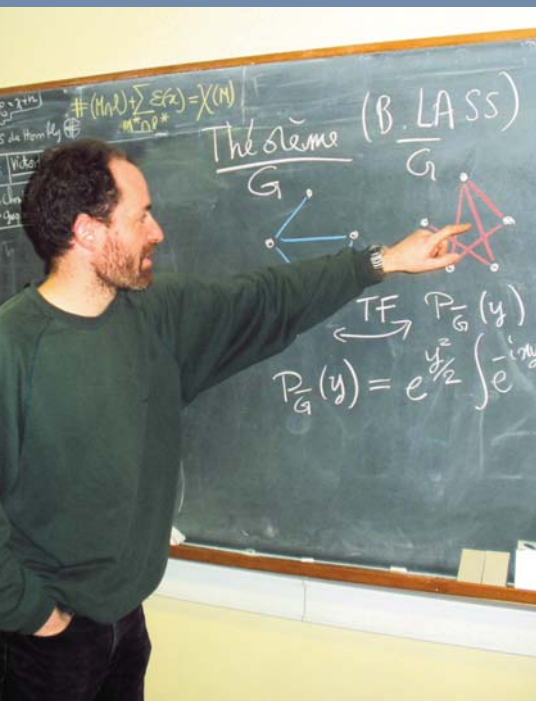
“Et les nombres régissent le feu.” Platon

Repères historiques

- > 1815 – 8 juillet : Seconde Restauration
- > 20 mars – 22 juin 1815 : Les « Cent Jours »
- > 1824 – 16 septembre : Avènement de Charles X

Joseph Fourier ou l'unité des mathématiques

En recherche mathématique, Joseph Fourier a inventé deux théories qui ont pris un essor considérable après lui, avec le développement des puissances de calcul informatique : la programmation linéaire et l'analyse dite "de Fourier".



La programmation linéaire est utilisée dans de nombreuses applications (par exemple, en micro-économie). On doit déterminer le maximum d'une fonction linéaire de variables soumises à des contraintes déterminées par des inégalités linéaires. Pour y parvenir, on peut utiliser l'algorithme, dit "du simplexe",

qui est véritablement une des applications les plus importantes des mathématiques. Joseph Fourier, de manière visionnaire, avait suggéré une méthode qui préfigure l'algorithme "du simplexe".

L'analyse de Fourier apparaît dans presque tous les domaines des mathématiques : probabilités, statistiques, équations aux dérivées partielles, mais aussi théorie de nombres, combinatoire, théorie des graphes... C'est le bon cadre pour formuler le principe d'incertitude de Heisenberg

en mécanique quantique. Cette même analyse de Fourier se cache aussi derrière les algorithmes de multiplication rapide, nécessaires pour les calculs informatiques.

Les applications de l'analyse de Fourier sont un des plus grands succès des mathématiques. Nous l'utilisons tous les jours souvent sans le savoir : télécommunications, compression MP3 ou compression d'image, imagerie médicale... Toutes ces technologies utilisent des élaborations de l'analyse de Fourier. ●

> Quand la transformée de Fourier structure les sons <

Les phénomènes physiques sont souvent modélisés par des fonctions, dont les variables sont des coordonnées de l'espace et du temps.

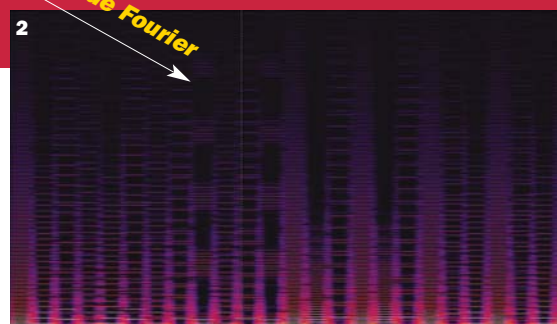
La dualité de Fourier permet de décrire la même réalité en terme de nouvelles variables (comme les fréquences), ce qui bien souvent permet d'éclaircir d'un jour nouveau la compréhension du phénomène.



Par exemple un signal sonore est une fonction complexe du temps (voir la figure 1).

L'observation du même signal du point de vue des fréquences permet de mettre en évidence sa structure "musicale" (voir figure 2). D'après Fourier, un son périodique, comme une voyelle, se réalise comme une superposition de signaux élémentaires (des sons "purs", ou sinusoïdaux). Ces signaux périodiques correspondent aux traits horizontaux dans la figure 2.

La représentation de Fourier du son (ici sous forme de spectrogramme) est en quelque sorte une portée musicale où non seulement la hauteur (fréquence) des notes serait indiquée mais aussi des indications sur le timbre. Une véritable partition de chef d'orchestre où chaque instrument possède sa ligne mélodique.



“Les travaux de Fourier incarnent l'unité des mathématiques, de ses versants les plus abstraits jusqu'aux applications les plus concrètes.”

Emmanuel Ferrand, mathématicien, Institut Fourier

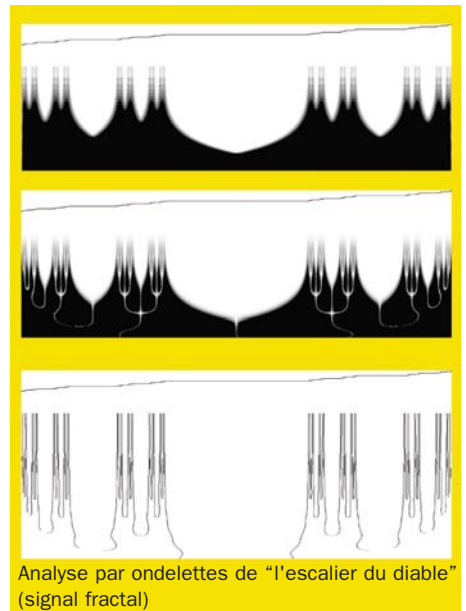
Les ondelettes : un zoom de la transformée de Fourier pour aller encore plus loin dans le traitement du signal

Dérivée de l'**analyse de Fourier**, la théorie mathématique des ondelettes découverte dans les années 1980 ouvre sur de multiples applications dans le domaine de la compression d'image, de l'imagerie médicale, de la prospection géophysique, du cryptage et du décryptage des données.

Principe : "obtenir simultanément des informations de fréquences et de temps dans un signal"

La transformée en ondelettes peut être vue comme un microscope mathématique permettant de zoomer sur un instant du signal, et d'accéder à des détails de plus en plus fins. La **transformée de Fourier** permet de retrouver les fréquences distinctes d'un même signal. Ainsi, sans être musicien, il est possible de retrouver toutes les notes d'un même accord de musique en appliquant la transformée. Par contre, il est impossible de savoir en appliquant la TF, quelle note de musique a été jouée en premier, l'information

temporelle est perdue... Pour être capable de séparer des événements très rapprochés dans le temps, un ingénieur de chez Elf-Aquitaine a eu l'idée d'adapter la **transformée de Fourier** en l'appliquant à différents morceaux du signal, les fenêtres temporelles étant d'autant plus courtes qu'on accède aux fréquences élevées. Les familles d'ondelettes étaient nées. Cette nouvelle théorie qui permet d'ajouter des informations temporelles aux informations de fréquences s'est avérée particulièrement utile pour détecter finement des changements brusques dans un signal. ●



Analyse par ondelettes de "l'escalier du diable" (signal fractal)

> Le nouveau format de compression d'image JPEG 2000 <

Les coefficients de la transformée par ondelettes sont un moyen très efficace de compresser les images numériques. Ainsi, une image numérique digitalisée sur 256×256 pixels peut être transformée, grâce à la transformée en ondelettes, en une carte de coefficients dans laquelle on peut jeter jusqu'à 95% de l'information. L'image comprimée, reconstruite à partir des 5% de coefficients restants est très proche de l'image originale.

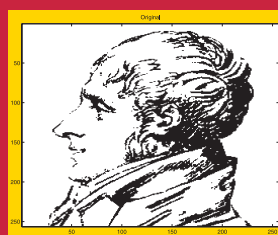


Image numérique originale, de taille $256 \times 256 = 65\,536$ pixels



Carte des coefficients d'ondelettes de l'image originale = image floue de l'image de départ (petite image en haut à gauche) + cartes des coefficients de détails à différentes échelles ($1/2$, $1/4$ et $1/8$) permettant de compléter l'image floue. Seulement 3030 coefficients d'ondelettes (moins de 5%) seront nécessaires pour reconstruire l'image de manière satisfaisante.

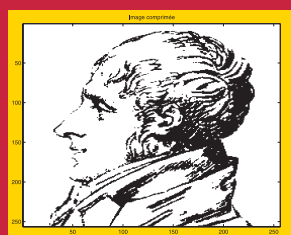
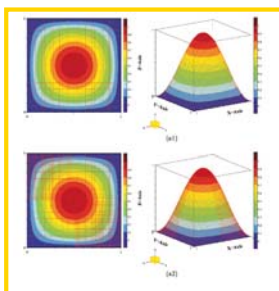


Image comprimée à 95.4 % reconstruite à partir des coefficients d'ondelettes les plus importants (figure du milieu).



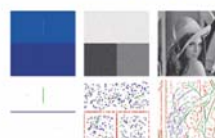
Résultat d'un calcul effectué sur bases d'ondelettes



Explications pour la mise en œuvre d'un algorithme de détections de bords dans une image

Détection et classification par la couleur de différents contours dans une image

Exemples : Points de bords et valeurs de α associées



Idem mais sur une radio de vertèbre



Contact : Valérie Perrier
Professeur INPG - Laboratoire de modélisation et calcul (UJF/INPG/CNRS) 04 76 51 45 51
Valerie.Perrier@imag.fr

Imagerie par résonance magnétique (IRM)

Voir les structures cérébrales anatomiques, détecter des pathologies particulières, diagnostiquer des maladies, ou réaliser des images sensibles à l'activité cérébrale permettant de voir le cerveau en action, sont autant d'applications rendues possibles grâce au développement de l'Imagerie par résonance magnétique (IRM). Or, ces nouvelles images médicales sont obtenues en grande partie grâce aux techniques d'analyse introduites par Joseph Fourier.

Voir le cerveau en action

Principe de l'IRM

On applique à un objet, plongé dans un champ magnétique statique, une perturbation radiofréquence.

Cette perturbation va affecter l'aimantation de l'objet étudié. La vitesse du retour vers l'équilibre de cette aimantation dépend du tissu étudié. Cette technique est très efficace pour différencier les tissus mous du cerveau, elle permet de distinguer les différents types de tissus : substances grises et blanches, tumeurs...



Ordinateur

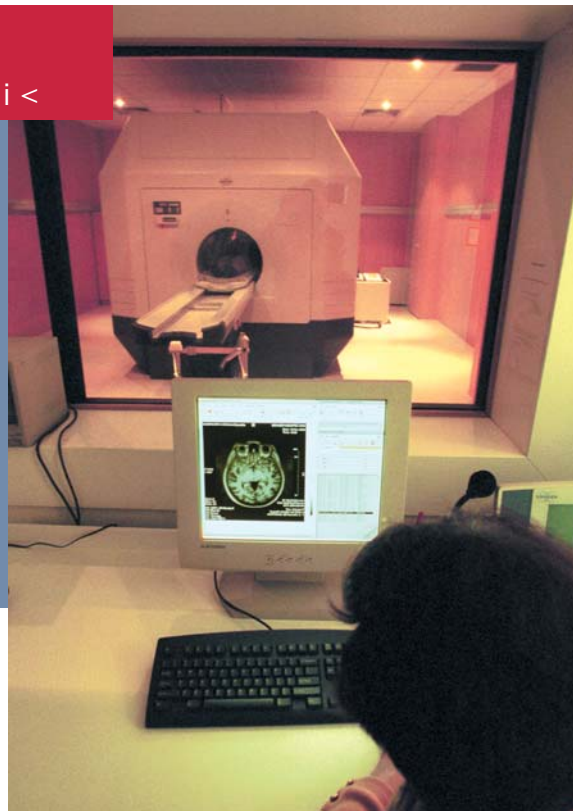
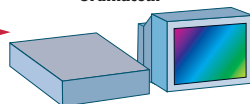


Image d'acquisition IRM

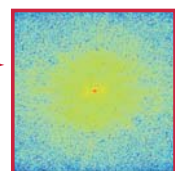
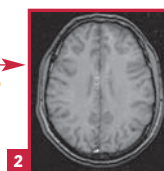


Image après sa transformation de Fourier



Transformée de Fourier

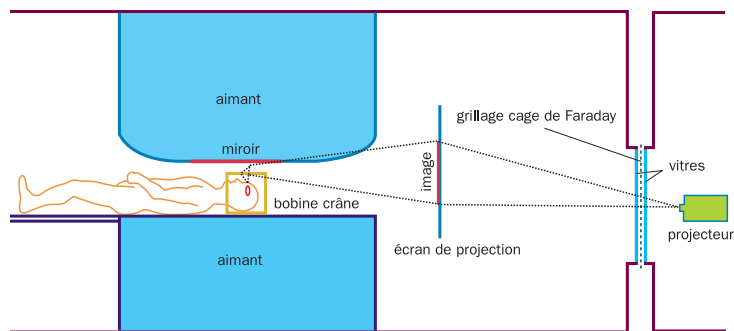
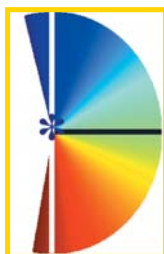
Ces deux images comportent les mêmes informations... sous des formes différentes !

Les acquisitions des images sont effectuées dans l'espace des fréquences spatiales (dit "espace-k"). Les images anatomiques obtenues ne sont pas compréhensibles dans cet espace (1). Ce n'est qu'après calcul de sa transformée de Fourier, que les images (ici du cerveau) apparaissent clairement (2).

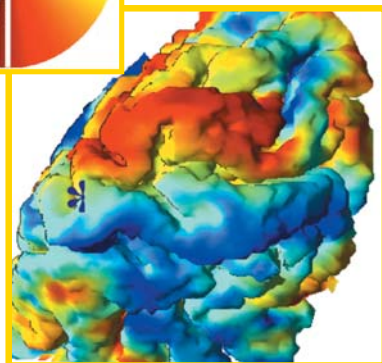
L'exemple de la délimitation d'aires visuelles dans le cerveau

Les chercheurs utilisent l'appareil d'IRM 3 Teslas pour réaliser des images anatomiques du cerveau ou pour obtenir des images concernant l'activité cérébrale. Dans l'exemple présenté, il s'agit de délimiter certaines aires du cerveau impliquées dans la vision. ●

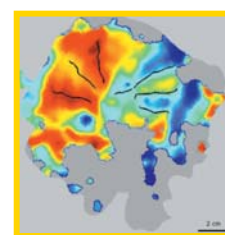
Dans les expériences d'IRM fonctionnelle portant sur la délimitation des aires visuelles, le sujet observe des stimuli visuels périodiques présentés via un petit miroir positionné face à ses yeux (schéma ci-dessus). Le chercheur enregistre les images au cours de cette présentation et cherche à identifier les régions activées par ce stimulus. Les différentes aires visuelles d'intérêt vont donc être stimulées périodiquement. Pour chaque volume élémentaire de l'image, on peut extraire le déroulement temporel du signal IRM et l'analyser en fréquences (amplitude et phase) par *transformation de Fourier*.



Carte d'activation de l'hémisphère gauche d'un sujet (à droite), traduisant les phases (codées en couleurs) des réponses fonctionnelles. La relation univoque entre phase et angle polaire (à gauche) dans l'hémichamp visuel correspondant est également représenté sur cette figure.



Après mise à plat du cortex (comme le globe terrestre donne le planisphère), on utilise ces cartes de phases pour délimiter les aires rétiniotopiques du cortex occipital.



Carte de phase en représentation plane et délimitation entre les aires visuelles.

Contact : Chantal Delon-Martin

Chercheur INSERM - Laboratoire de Résonance magnétique nucléaire bioclinique
U594 (INSERM/UJF/CHU) 04 76 76 88 95
Chantal.Delon@ujf-grenoble.fr

Etudier les atmosphères planétaires, les molécules intersidérales, détecter des pollutions dans l'atmosphère terrestre, étudier des combustions (moteurs de voiture, fusée...), contrôler la qualité des produits pharmaceutiques, sont autant d'applications rendues possibles par une technique de spectrométrie appelée : **"spectroscopie par transformée de Fourier"**.

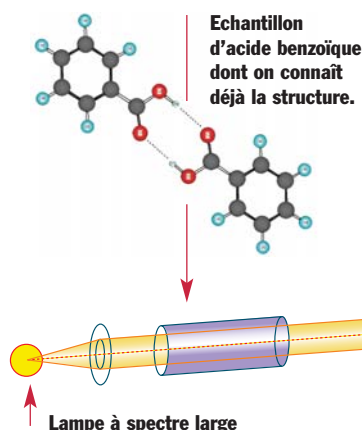
La spectroscopie moléculaire par **"transformée de Fourier"**

Cette technique très performante permet d'acquérir des spectres* d'absorption ou de transmission d'un gaz, d'un plasma, d'un liquide ou d'un solide, c'est-à-dire leurs signatures spectrales dans un domaine allant de l'infrarouge à l'ultraviolet.

L'exemple de l'étude physico-chimique de l'acide benzoïque

Au sein du Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée (DRFMC), laboratoire de Physico-chimie Moléculaire du CEA-Grenoble, les chercheurs utilisent la spectroscopie par **transformée de Fourier** pour étudier les déformations, torsions et vibrations d'élongation de la molécule d'acide benzoïque en poudre à une température de 6° Kelvin (-267° Celsius). Cette molécule modèle est intéressante pour connaître notamment

les réactions des liaisons hydrogène à l'origine d'interactions qui permettent à la vie de se développer dans l'eau. ●



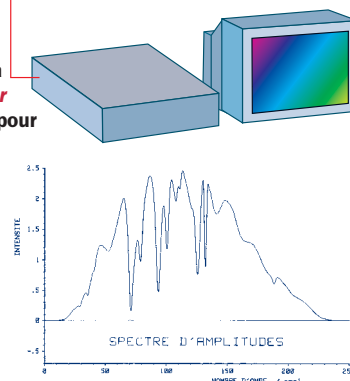
Lorsque l'interféromètre de Michelson est éclairé par un faisceau monochromatique, cet enregistrement est sinusoïdal pur. Il est très complexe si un plus grand nombre de composantes spectrales sont présentes dans le spectre de la source lumineuse. Dans tous les cas, on obtient par la transformée de Fourier d'un interférogramme le spectre du rayonnement pénétrant dans l'interféromètre.

*La lumière se décompose en vibrations (fréquences ou longueurs d'onde) dont le spectre optique s'étend de l'infrarouge (fréquences basses) à l'ultra-violet (fréquences élevées). La lumière visible se situe entre $3,75 \times 10^{14}$ Hz et $7,5 \times 10^{14}$ Hz.

*Nombre d'onde : unité (exprimée en cm^{-1}), utilisée en physique moléculaire et en spectroscopie. Elle correspond à l'inverse de la longueur d'onde.

L'ordinateur calcule la **transformée de Fourier** de l'interférogramme pour obtenir le spectre.

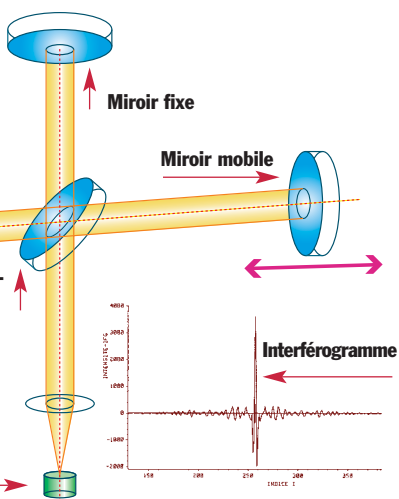
Spectre d'absorption de l'acide benzoïque dans l'infrarouge lointain.



Hans Zelsmann, du laboratoire de PCM au CEA positionnant son échantillon dans le spectromètre.

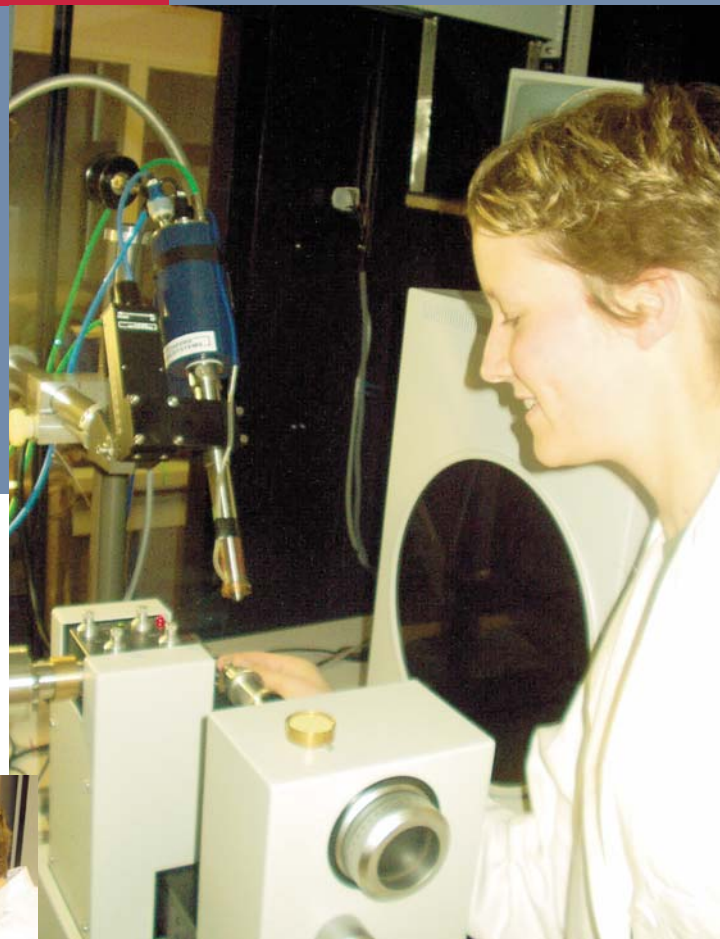
> Interféromètre de Michelson <

Le faisceau lumineux envoyé dans l'interféromètre est séparé à l'aide d'un miroir semi-transparent en deux faisceaux qui parcourent des trajets différents. Ces deux faisceaux sont ensuite recombinés sur le même miroir. L'intensité lumineuse du faisceau recombiné, varie en fonction du déplacement relatif des deux miroirs : à chaque déplacement correspond une différence de chemin optique entre les deux faisceaux. L'enregistrement de la variation de cette intensité lumineuse en fonction du déplacement du miroir mobile est appelé un interférogramme.



Biologie structurale

Pour développer de nouveaux médicaments, comprendre l'activité d'un composé pharmaceutique ou déterminer la fonction biologique d'une protéine, connaître sa structure atomique est primordial. Pour y parvenir, les cristallographes utilisent la diffraction des rayons X, et ont besoin des relations mathématiques développées par Joseph Fourier.



Sélection du cristal pour l'expérience de diffraction.



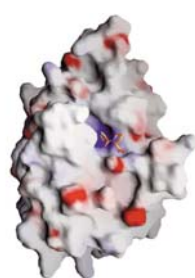
Cristal de Bêta-lactamase vu au microscope.

Les molécules de Bêta-lactamase sont cristallisées pour qu'il y ait diffraction. Le cristal renvoie la lumière intense dans des directions bien précises appelées taches de diffraction.

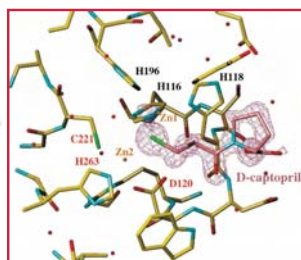
CLICHE DE DIFFRACTION RECUEILLI SUR UNE PLAQUE PHOTO-SENSIBLE (IMAGE-PLATE)

Du cristal à la structure de la protéine Bêta-lactamase impliquée dans la réaction avec les antibiotiques

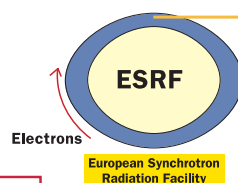
La Bêta-lactamase est une protéine que produit la bactérie pour neutraliser l'antibiotique. Pour mieux comprendre comment un antibiotique peut perdre son efficacité, les biologistes de l'Institut de biologie structurale ont étudié par cristallographie, la protéine de Bêta-lactamase en interaction avec le Docaptopril (une molécule inhibitrice). ●



Images de la molécule en interaction avec la molécule inhibitrice.



La carte de densité électronique permet de distinguer les atomes des molécules du cristal et de trouver leur arrangement dans l'espace : la structure de la molécule peut être déterminée.



Rayons X

Les rayons X de longueur d'onde de 1 Å (10^{-10} m ou 1/10 millionième de milli-mètre) sont bien adaptés pour être diffractés par les cristaux car leur longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des distances interatomiques des atomes des cristaux.

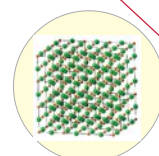
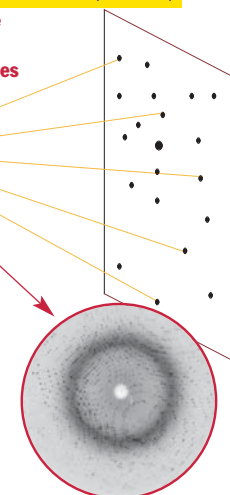
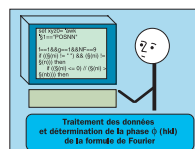


Schéma agrandi du cristal.



Le cliché de diffraction

Transformée de Fourier



$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{V} \sum_{hkl} |F(hkl)| \exp[i\Phi(hkl)] \exp[-i2\pi(hx + ky + lz)]$$

Contacts : Jean VICAT
Professeur à l'Université Joseph Fourier
Institut de biologie structurale
(UJF/CNRS/CEA) 04 38 78 95 93
vicat@ibs.fr

Richard Kahn
Directeur de recherche CNRS
Institut de biologie structurale
(UJF/CNRS/CEA) 04 38 78 96 45
kahn@ibs.fr



La résonance magnétique nucléaire des macromolécules biologiques

Pour déterminer la structure des macromolécules biologiques, la résonance magnétique nucléaire (RMN) est une technique très utilisée aujourd'hui.

Elle s'appuie elle aussi sur la **transformée de Fourier**.

Principe de la RMN

La Résonance Magnétique Nucléaire est une technique physique basée sur l'observation du spin du noyau d'un atome lorsque celui-ci est placé dans un champ magnétique. Les noyaux sont capables d'absorber des radiofréquences de l'ordre de quelques centaines de MHz. En aviation, le radar envoie une onde radiofréquence sur les avions

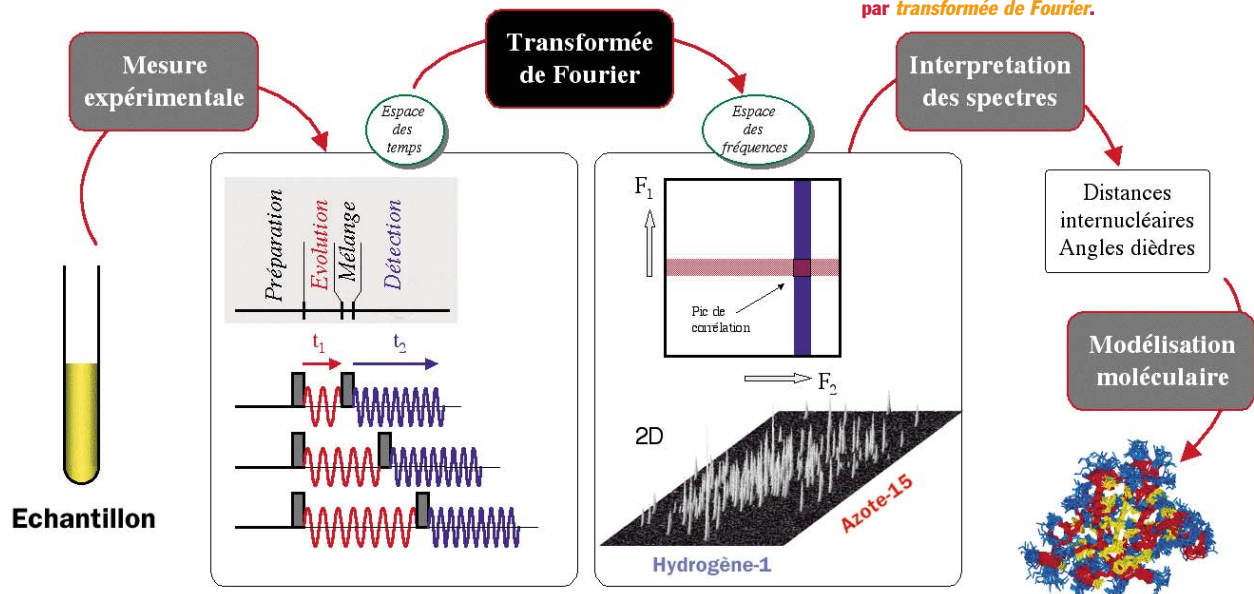
aux alentours et l'analyse de la signature du signal reçu permet de caractériser le type de l'aéronef.

En RMN, des ondes radio sont aussi envoyées sur les spins de l'échantillon et l'analyse du signal renvoyé (sa fréquence, son intensité, son déclin en fonction du temps...) renseigne sur la nature chimique de ceux-ci. ●



Spectromètre de RMN

En raison de son environnement physique différent, chaque noyau résonne à une fréquence différente (gamme de l'ordre de quelques centaines de MHz). Pour détecter ces fréquences rapidement, une technique consiste à exciter tous les noyaux ensemble puis à analyser le spectre des fréquences obtenues par **transformée de Fourier**.

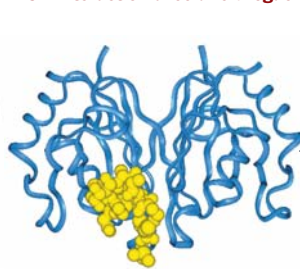
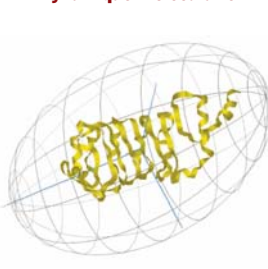
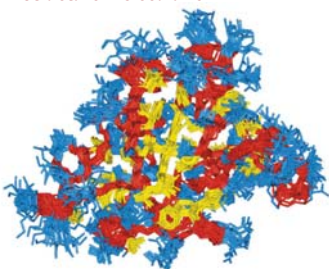


La RMN permet de déterminer la structure en solution de petites macromolécules biologiques (encart A), d'analyser le comportement dynamique de celles-ci (encart B) et de caractériser l'interaction entre deux partenaires (encart C). Les structures obtenues en RMN sont habituellement représentées par la superposition de plusieurs modèles compatibles avec les données (encart A) dont la dispersion rend compte de la précision de la mesure et des mouvements existants. La dynamique d'une protéine joue un rôle important dans sa fonction biologique et la RMN a montré que la molécule dans l'encart B ne tournait pas de manière isotrope, en accord avec sa forme oblongue. La résistance aux antibiotiques est une question majeure de santé publique : l'encart C montre – sur la base de données RMN – comment l'antibiotique en jaune peut être séquestré efficacement par une protéine et perdre ainsi son activité biologique.

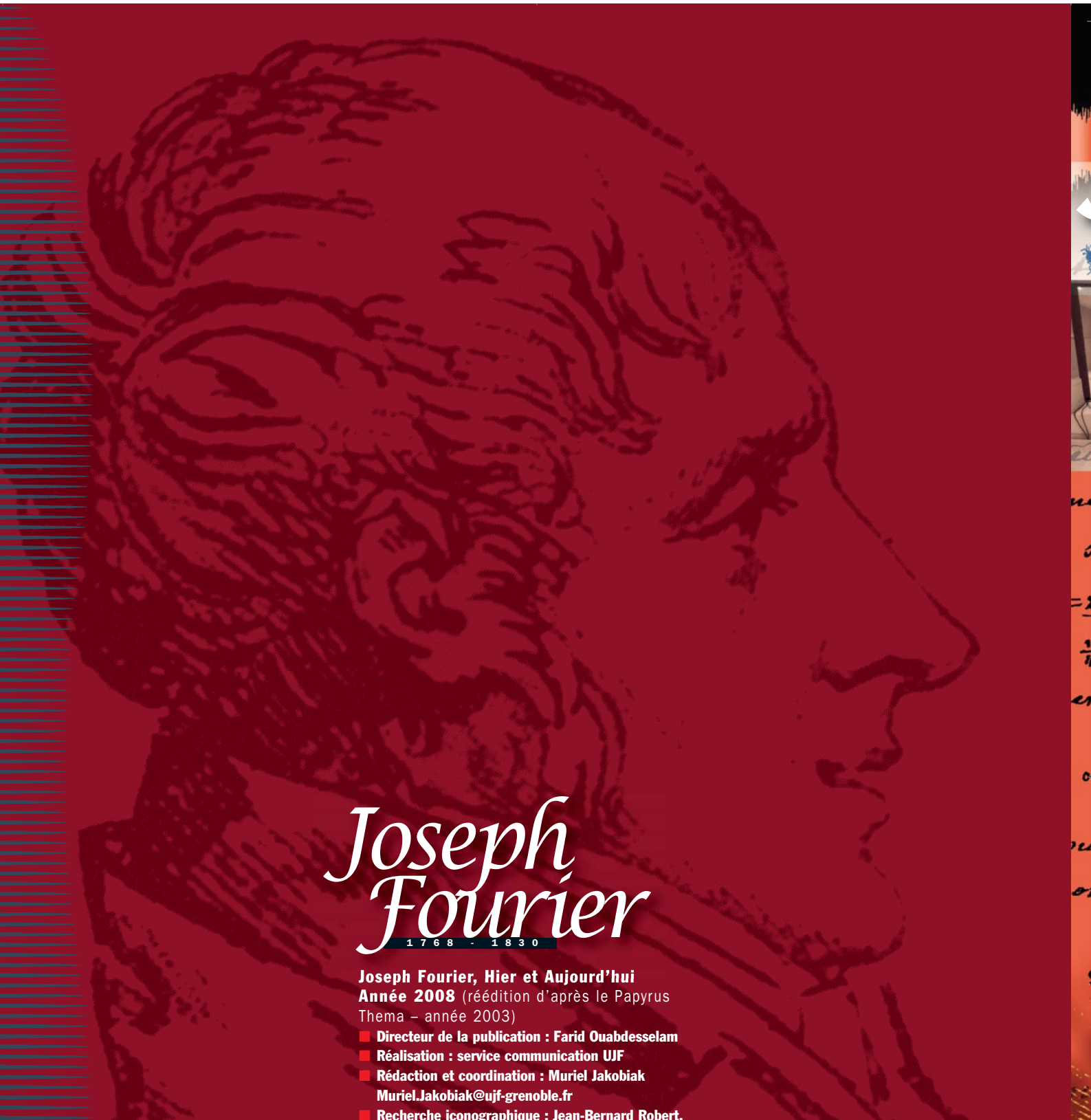
A - Structure moléculaire

B - Dynamique moléculaire

C - Interaction avec une drogue



Contact : Dominique Marion
 Directeur de recherche CNRS
 Institut de biologie structurale (UJF/CNRS/CEA)
 04 38 78 36 98 - marion@ibs.fr



Joseph Fourier

1768 - 1830

Joseph Fourier, Hier et Aujourd'hui

Année 2008 (réédition d'après le Papyrus
Thema – année 2003)

- **Directeur de la publication** : Farid Ouabdesselam
- **Réalisation** : service communication UJF
- **Rédaction et coordination** : Muriel Jakobiak
Muriel.Jakobiak@ujf-grenoble.fr
- **Recherche iconographique** : Jean-Bernard Robert,
Marie-Françoise Bois-Delatte
- **Création graphique / maquette** : STIM
- **Crédit photo** : François Henry – UJF, service
communication UJF, IBS, Palais de la Découverte,
Bibliothèque municipale de Grenoble
- **Remerciements** : au CCSTI de Grenoble,
à la bibliothèque municipale de Grenoble
et à la bibliothèque interuniversitaire
de sciences de Grenoble.
- **Contact** : Tél : +33 (0)4 76 51 44 44
Fax : +33 (0)4 76 51 43 43
<http://www.ujf-grenoble.fr>
- **Tirage** : 3 000 exemplaires